Planche n° 8. Intégration sur un intervalle quelconque. Corrigé

Exercice n° 1

1) Pour $x \geqslant 0$, $x^2+4x+1 \geqslant 0$ et donc la fonction $f : x \mapsto x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Quand x tend vers $+\infty$, $x+2-\sqrt{x^2+4x+1} = \dfrac{3}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} \sim \dfrac{3}{2x}$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{3}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n'est pas intégrable sur $[0;+\infty[$.

2) Pour $x \geqslant 1$, $1+\dfrac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc la fonction $f : x \mapsto e-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$.

Quand x tend vers $+\infty$, $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} = e-\dfrac{e}{2x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puis $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{2x}$. Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{e}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

3) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x+e^x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, de signe constant sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

• En 0, $\dfrac{\ln x}{x+e^x} \sim \ln x$ et donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Comme $\dfrac{1}{2}<1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite et il en est de même de la fonction f.

• En $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{\ln x}{e^x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Comme $2>1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de la fonction f.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

4) La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$ est continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$. Donc la fonction $f : x \mapsto \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

En $+\infty$, $\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right) = \dfrac{1}{3}\ln x+\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/3}-1\right) = \dfrac{1}{3}\ln x+\ln\left(\dfrac{1}{3x}+O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = -\dfrac{2}{3}\ln x-\ln 3+O\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Par suite, $\sqrt{x}\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right) = -\dfrac{2}{3}\sqrt{x}\ln x-\ln 3\sqrt{x}+o(1)$.

Mais alors $x^2f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{x}\ln x-\ln 3\sqrt{x}+2\ln x+o(1)\right)$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2f(x)=0$. Finalement, $f(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

5) La fonction $f : x \mapsto e^{-\sqrt{x^2-x}}$ est continue sur $[1,+\infty[$ car, $\forall x \geqslant 1$, $x^2-x \geqslant 0$.

Quand x tend vers $+\infty$, $x^2f(x) = \exp\left(-\sqrt{x^2-x}+2\ln x\right) = \exp(-x+o(x))$ et donc $x^2f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. $f(x)$ est ainsi négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ et donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

6) La fonction $f : x \mapsto x^{-\ln x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Quand x tend vers 0, $x^{-\ln x} = e^{-\ln^2 x} \to 0$. La fonction f se prolonge par continuité en 0 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

• Quand x tend vers $+\infty$, $x^2f(x) = \exp\left(-\ln^2 x+2\ln x\right) \to 0$. Donc f est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ et f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

7) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Quand x tend vers 0, $f(x) \sim \dfrac{5x-3x}{x^{5/3}} = \dfrac{2}{x^{2/3}} > 0$. Puisque $\dfrac{2}{3}<1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x^{2/3}}$ est positive et intégrable sur un voisinage de 0 à droite et il en est de même de la fonction f.

• En $+\infty$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{2}{x^{5/3}}$ et puisque $\dfrac{5}{3}>1$, la fonction f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

8) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

• En 0, $f(x) \sim -\ln x = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

• En 1, $f(x) \sim \dfrac{\ln x}{2(x-1)} \sim \dfrac{1}{2}$. La fonction f se prolonge par continuité en 1 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 1 à gauche ou à droite.

• En $+\infty$, $x^{3/2}f(x) \sim \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = o(1)$. Donc $f(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^{3/2}}$ quand x tend vers $+\infty$ et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

9) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}$ est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ et paire. Il suffit donc d'étudier l'intégrabilité de f sur $]0,+\infty[$.

f est positive et équivalente en 0 à droite à $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

f est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ puis par parité sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{|x|}}\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut par parité $2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{|x|}}\,dx$.

10) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$, paire et équivalente au voisinage de 1 à droite à $\dfrac{1}{2\sqrt{2}(1-x)^{1/2}}$ avec $\dfrac{1}{2} < 1$. f est donc intégrable sur $]-1,1[$.

11) La fonctionf $: x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$ est continue et positive sur $]0,1[$, équivalente au voisinage de 0 à droite à $\dfrac{1}{x^{2/3}}$ et au voisinage de 1 à gauche à $\dfrac{1}{(1-x)^{1/3}}$. f est donc intégrable sur $]0,1[$.

12) La fonctionf $: x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{Arccos}(1-x)}$ est continue et positive sur $]0,1]$.

En 0, $\mathrm{Arccos}(1-x) = o(1)$. Donc $\mathrm{Arccos}(1-x) \sim \sin(\mathrm{Arccos}(1-x)) = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x-x^2} \sim \sqrt{2}\sqrt{x}$.

Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ et f est intégrable sur $]0,1[$.

Exercice n° 2

1) Pour tout couple de réels (a,b), la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^a \ln^b x}$ est continue et positive sur $[2,+\infty[$. Etudions l'intégrabilité de f au voisinage de $+\infty$.

1er cas. Si $a > 1$, $x^{(a+1)/2}f(x) = \dfrac{1}{x^{(a-1)/2}\ln^b x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ car $\dfrac{a-1}{2} > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{(a+1)/2}}\right)$. Comme $\dfrac{a+1}{2} > 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{(a+1)/2}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f. Dans ce cas, f est intégrable sur $[2,+\infty[$.

2ème cas. Si $a < 1$, $x^{(a+1)/2}f(x) = \dfrac{x^{(1-a)/2}}{\ln^b x} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ car $\dfrac{1-a}{2} > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc $f(x)$ est prépondérant devant $\dfrac{1}{x^{(a+1)/2}}$ en $+\infty$. Comme $\dfrac{a+1}{2} < 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{(a+1)/2}}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f. Dans ce cas, f n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$.

3ème cas. Si $a = 1$. Pour $X > 2$ fixé , en posant $t = \ln x$ et donc $dt = \dfrac{dx}{x}$ on obtient

$$\int_2^X \frac{1}{x\ln^b x}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{dt}{t^b}.$$

Puisque $\ln X$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$ et que les fonctions considérées sont positives, f est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $b > 1$.

En résumé ,

$$\boxed{\text{la fonction } x \mapsto \frac{1}{x^a \ln^b x} \text{ est intégrable sur } [2, +\infty[\text{ si et seulement si } a > 1 \text{ ou } (a = 1 \text{ et } b > 1).}$$

(En particulier, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ n'est pas intégrable sur voisinage de $+\infty$ bien que négligeable devant $\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$).

2) Pour tout réel a, la fonction $f : x \mapsto (\tan x)^a$ est continue et strictement positive sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. De plus, pour tout réel x de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{f(x)}$.

• **Etude en 0 à droite.** $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^a$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite si et seulement si $a > -1$.

• **Etude en $\dfrac{\pi}{2}$ à gauche.** $f(x) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^{-a}$. Donc f est intégrable sur un voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ à gauche si et seulement si $-a > -1$ ou encore $a < 1$.

En résumé, f est intégrable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ si et seulement si $-1 < a < 1$.

3) Pour $x \geqslant 1$, $1 + \dfrac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc pour tout couple (a, b) de réels, la fonction $f : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \dfrac{b}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

En $+\infty$, $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = \dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ puis $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = 1 + \dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et donc

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} (1 - a) + \frac{1 - b}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

• Si $a \neq 1$, f a une limite réelle non nulle en $+\infty$ et n'est donc pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

• Si $a = 1$ et $b \neq 1$, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1 - b}{x}$. En particulier, f est de signe constant sur un voisinage de $+\infty$ et n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

• Si $a = b = 1$, $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et dans ce cas, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

En résumé, f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a = b = 1$.

4) Pour tout couple (a, b) de réels, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^a(1 + x^b)}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

• **Etude en 0.**

-Si $b > 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a < 1$,

-si $b = 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a < 1$,

-si $b < 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a + b < 1$.

• **Etude en $+\infty$.**

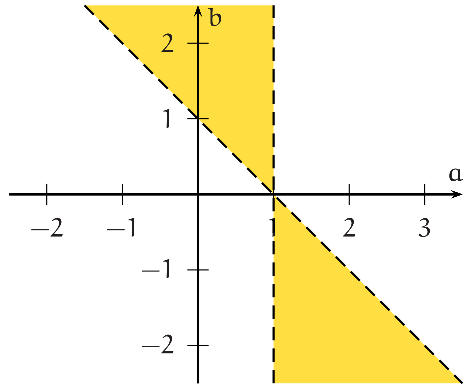
-Si $b > 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a + b > 1$,

-si $b = 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a > 1$,

-si $b < 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a > 1$.

En résumé, f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $((b \geqslant 0$ et $a < 1)$ ou $(b < 0$ et $a + b < 1))$ et $((b > 0$ et $a + b > 1)$ ou $(b \leqslant 0$ et $a > 1))$ ce qui équivaut à $(b > 0$ et $a + b > 1$ et $a < 1)$ ou $(b < 0$ et $a > 1$ et $a + b < 1)$.

Représentons graphiquement l'ensemble des solutions. La zone solution est la zone colorée.



Exercice n° 3

1) Soient ε et X deux réels tels que $0 < \varepsilon < X$. Les deux fonction $x \mapsto 1 - \cos x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_{\varepsilon}^{X} \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_{\varepsilon}^{X} + \int_{\varepsilon}^{X} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{1-\cos X}{X} - \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{X} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

• La fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, est prolongeable par continuité en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et donc intégrable sur un voisinage de 0, est dominée par $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{X} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ a une limite réelle quand ε tend vers 0 et X tend vers $+\infty$.

• $\left|\dfrac{1-\cos X}{X}\right| \leqslant \dfrac{1}{X}$ et donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1-\cos X}{X} = 0$.

• $\dfrac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc $\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon} \dfrac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est une intégrale convergente et de plus

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{2\sin^2(u)}{4u^2}\,2du = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du.$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \text{ converge et de plus } \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.}$$

2) Soit $a > 0$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^a}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• Sur $]0, 1]$, la fonction f est de signe constant et l'existence de $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx$ équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $]0, 1]$. Puisque f est équivalente en 0 à $\dfrac{1}{x^{a-1}}$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ converge en 0 si et seulement si $a - 1 < 1$ ou encore $a < 2$. On suppose dorénavant $a < 2$.

• Soit $X > 1$. Les deux fonction $x \mapsto -\cos x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^a}$ sont de classe C^1 sur le segment $[1, X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_{1}^{X} \frac{\sin x}{x^a}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x^a}\right]_{1}^{X} - a\int_{1}^{X} \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx = -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1 - a\int_{1}^{X} \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx.$$

Maintenant, $\left|\dfrac{\cos x}{x^{a+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{a+1}}$, et puique $a + 1 > 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^{a+1}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_{1}^{X} \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Comme d'autre part, la fonction $X \mapsto -\dfrac{\cos X}{X^a} + \cos 1$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$, on a montré que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge en $+\infty$.

Finalement

$$\boxed{\forall a > 0,\ \text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx \text{ converge si et seulement si } a < 2.}$$

3) Soit X un réel strictement positif. Le changement de variables $t = x^2$ suivi d'une intégration par parties fournit :

$$\int_1^X e^{ix^2}\,dx = \int_1^{X^2} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{i}{2}\left(-\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} + e^i - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{e^{it}}{t^{3/2}}\,dt\right)$$

Maintenant, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} = 0$ car $\left|\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}}\right| = \frac{1}{\sqrt{X}}$. D'autre part, la fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\left|\frac{e^{it}}{t^{3/2}}\right| = \frac{1}{t^{3/2}}$. Ainsi, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\,dx$ est une intégrale convergente et puisque d'autre part la fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on a montré que

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx \text{ converge.}}$$

On en déduit encore que les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ sont des intégrales convergentes (intégrales de Fresnel).

4) La fonction $f\ :\ x \mapsto x^3\sin(x^8)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $X > 0$. Le changement de variables $t = x^4$ fournit

$$\int_0^X x^3\sin(x^8)dx = \frac{1}{4}\int_0^{X^4} \sin(t^2)\,dt = \frac{1}{4}\mathrm{Im}\left(\int_0^{X^4} e^{it^2}\,dt\right).$$

D'après 3), $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$ est une intégrale convergente et donc $\int_0^{+\infty} x^3\sin(x^8)\,dx$ converge.

5) La fonction $f\ :\ x \mapsto \cos(e^x)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $X > 0$. Le changement de variables $t = e^x$ fournit

$$\int_0^X \cos(e^x)\,dx = \int_1^{e^X} \frac{\cos t}{t}\,dt.$$

On montre la convergence en $+\infty$ de cette intégrale par une intégration par parties analogue à celle de la question 1). L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\,dx$ converge.

Exercice n° 4

1) I_n existe si et seulement si $n \geqslant 1$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in]0, +\infty[$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int_0^X \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt &= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right]_0^X + 2n\int_0^X \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt = \frac{X}{(X^2+1)^n} + 2n\int_0^X \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt \\ &= \frac{X}{(X^2+1)^n} + 2n\int_0^X \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt - 2n\int_0^X \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt.\end{aligned}$$

Puisque les fonctions considérées sont toutes intégrables sur $[0, +\infty[$, quand X tend vers $+\infty$ on obtient $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n.$$

En tenant compte de $I_1 = \frac{\pi}{2}$, on obtient pour $n \geqslant 2$,

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times I_1 = \frac{((2n-2)\times(2n-3)\times(2n-4)\ldots\times 3\times 2\times 1}{((2n-2)\times(2n-4)\times\ldots\times 4\times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!^2} \times \frac{\pi}{2}.}$$

Remarque. En posant $t = \tan x$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\tan^2 x)^n} \times (1+\tan^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x)^{n-1}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} u\,du = W_{2n-2}$ (intégrales de Wallis).

2) On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dominée par $\dfrac{1}{x^3}$ en $+\infty$. La fonction f est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

Le changement de variables $t = \dfrac{1}{x}$ fournit $I = \displaystyle\int_{+\infty}^0 \frac{1}{1+\frac{1}{t^3}} \times -\frac{dt}{t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,dt$. Donc

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{x^n}$. Par suite, f est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $n \geqslant 2$.

Soit $n \geqslant 2$. La décomposition en éléments simples de f s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{x+k},$$

avec

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \lim_{x\to -k} (x+k)f(x) = \frac{1}{(-k+1)\dots(-k+(k-1))(-k+(k+1))\dots(-k+n)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= (-1)^{k-1}\frac{k\binom{n}{k}}{n!}.
\end{aligned}$$

Une primitive de f est donc la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k\binom{n}{k} \ln(x+k)$.

Quand x tend vers $+\infty$, $F(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)\ln x + o(1)$. Cette expression a une limite réelle si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$.

Puisque f est intégrable au voisinage de $+\infty$, on a donc nécessairement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$ puis $F(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Il reste

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\,dx = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k} \ln(k).}$$

4) Puisque $a > 0$, $-\dfrac{1}{a}$ n'est dans $[0,1[$. Puisque $(1-x)(1+ax)$ est strictement positif sur un voisinage à droite de 0 et que $-\dfrac{1}{a}$ n'est pas dans $[0,1[$, $(1-x)(1+ax) > 0$ pour $x \in [0,1[$. Dans ce cas, la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}$ est continue et positive sur $[0,1[$.

$\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{(1+a)\sqrt{1-x}}$ et donc, la fonction f est intégrable sur un voisinage de 1. Finalement, la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}$ est intégrable sur $[0,1[$.

Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx$ **pour** $a > 0$**.**

Pour $x \in [0,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} = \dfrac{1}{1-x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+ax}}$. On pose $u = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+ax}}$ et donc $x = \dfrac{-u^2+1}{au^2+1}$ et $dx = \dfrac{-2(a+1)u}{(au^2+1)^2}\,du$. On obtient

$$I = \int_1^0 u \times \frac{1}{1 - \dfrac{-u^2+1}{au^2+1}} \times \frac{-2(a+1)u}{(au^2+1)^2}\,du = 2\int_0^1 \frac{1}{au^2+1}\,du.$$

Donc, puisque $a > 0$, $I = \left[\dfrac{2}{\sqrt{a}}\operatorname{Arctan}(u\sqrt{a})\right]_0^1 = \dfrac{2}{\sqrt{a}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{a})$.

$$\boxed{\forall a > 0,\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{a}).}$$

5) La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, équivalente au voisinage de $+\infty$ à e^{-x}. La fonction f est donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$ puis intégrable sur $[0,+\infty[$.

On pose $u = e^x$ et donc $x = \ln u$ puis $dx = \dfrac{du}{u}$. On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+u)\left(1+\dfrac{1}{u}\right)}\,\frac{du}{u} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2}\,du = \frac{1}{2}$$

6) La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4}$ est continue positive sur $[0,+\infty[$ car pour tout $x \geqslant 0$, $5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4 \geqslant 4 > 0$. En $+\infty$, $\dfrac{1}{5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4} \sim \dfrac{e^{-x}}{4}$ et donc f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On pose $u = e^x$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\dfrac{5}{2}\left(u+\dfrac{1}{u}\right) + \dfrac{3}{2}\left(u-\dfrac{1}{u}\right) + 4}\,\frac{du}{u} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{4u^2+4u+1}\,du$$
$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(2u+1)^2}\,du = \left[-\frac{1}{2(2u+1)}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{6}.$$

7) La fonction $f\ :\ t \mapsto 2 + (t+3)\ln\left(\dfrac{t+2}{t+4}\right)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et de signe constant au voisinage de $+\infty$. L'intégrabilité de f équivaut donc à l'existence d'une limite réelle en $+\infty$ pour la fonction $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \left(2 + (t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)dt$.

Soit $x > 0$. Une intégration par parties fournit

$$
\begin{aligned}
F(x)-2x &= \int_0^x (t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\,dt = \left[\frac{(t+3)^2}{2}\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x (t+3)^2\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t+4}\right)\,dt\\
&= \frac{(x+3)^2}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)+\frac{9}{2}\ln 2-\int_0^x \frac{(t+3)^2}{(t+2)(t+4)}\,dt\\
&= \frac{(x+3)^2}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)+\frac{9}{2}\ln 2-\int_0^x \left(1+\frac{1}{2(t+2)}-\frac{1}{2(t+4)}\right)\,dt\\
&= \frac{(x+3)^2}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)+\frac{9}{2}\ln 2-x-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)-\frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$\forall x>0,\ F(x)=x+\frac{1}{2}(x^2+6x+8)\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)+4\ln 2.$$

Maintenant quand x tend vers $+\infty$

$$\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)=\frac{2}{x}-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{8}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et donc

$$\frac{1}{2}(x^2+6x+8)\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)=\frac{1}{2}(x^2+6x+8)\left(-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=-x-3+o(1)$$

et finalement $F(x)\underset{x\to+\infty}{=}4\ln 2-3+o(1)$. Ceci montre l'intégrabilité de la fonction f sur $[0,+\infty[$ et

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)\,dt=4\ln 2-3.}$$

8) La fonction $f\ :\ x\mapsto \dfrac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{\pi}{2x^3}$ et donc est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction f est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. Posons alors $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

1er calcul. On pose $u=\dfrac{1}{x}$ et on obtient

$$I=\int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{u}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2}\,\frac{-du}{u^2}=\int_0^{+\infty}\frac{u\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,u\right)}{(u^2+1)^2}\,du=-I+\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{u}{(u^2+1)^2}\,du$$

et donc $2I=\dfrac{\pi}{2}\left[-\dfrac{1}{2(1+u^2)}\right]_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{4}$ ce qui fournit

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx=\frac{\pi}{8}.}$$

2ème calcul. Soit $X>0$. Une intégration par parties fournit

$$\int_0^X \frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx=\left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\,\mathrm{Arctan}\,x\right]_0^X+\frac{1}{2}\int_0^X\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{\mathrm{Arctan}\,X}{2(X^2+1)}+\frac{1}{2}\int_0^X\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

et quand X tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$. On pose alors $x=\tan t$ et on obtient

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(1+\tan^2 t)^2}(1+\tan^2 t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2t))\,dt=\frac{\pi}{8}.$$

9) Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{\ln x}{x^4}$. Cette dernière expression est elle-même négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{x^3}$. La fonction f est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

Calcul. On pose $u = \dfrac{1}{x}$. On obtient $I = \displaystyle\int_{+\infty}^{0} \dfrac{\dfrac{1}{u}\ln\left(\dfrac{1}{u}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)^2}\,\dfrac{-du}{u^2} = -I$ et donc $I = 0$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx = 0.}$$

10) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\tan x}$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
En $\dfrac{\pi}{2}$ à gauche, $0 < \sqrt{\tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}-x}}$. Ceci montre que la fonction f est intégrable sur un voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ à gauche. Finalement, la fonction f est intégrable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. On peut noter $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\,dx$.

On pose $u = \sqrt{\tan x}$ et donc $\tan x = u^2$ puis $(1+\tan^2 x)\,dx = 2u du$ et donc $dx = \dfrac{2u\,du}{1+u^4}$. On obtient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{2u^2}{1+u^4}du$.
Or $u^4+1 = u^4+2u^2+1-2u^2 = \left(u^2+1-u\sqrt{2}\right)\left(u^2+1+u\sqrt{2}\right)$ et donc

$$\begin{aligned}\frac{u^2}{1+u^4} &= \frac{u^2}{\left(u^2+u\sqrt{2}+1\right)\left(u^2-u\sqrt{2}+1\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2-u\sqrt{2}+1} - \frac{u}{u^2+u\sqrt{2}+1}\right)\\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-u\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{\left(u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{\left(u+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

Par suite, une primitive de la fonction $u \mapsto \dfrac{2u^2}{u^4+1}$ sur $[0,+\infty[$ est la fonction

$$F : u \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{u^2-u\sqrt{2}+1}{u^2+u\sqrt{2}+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{Arctan}(u\sqrt{2}-1) + \mathrm{Arctan}(u\sqrt{2}+1)\right)$$

On en déduit que $I = \displaystyle\lim_{u\to+\infty} F(u) - F(0) = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.}$$

11) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 car $f(t) \underset{t\to 0}{=} b-a+o(1)$ et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Donc f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit x un réel strictement positif. Chacune des deux fonctions $t \mapsto \dfrac{e^{-at}}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $[x,+\infty[$ et on peut écrire

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\,dt - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t}\,dt.$$

En posant $u = at$ et donc $\dfrac{du}{u} = \dfrac{dt}{t}$, on obtient $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-at}}{t}\,dt = \int_{ax}^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{u}\,du$ et de même $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-bt}}{t}\,dt = \int_{bx}^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{u}\,du$ et donc

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

Maintenant, pour $x > 0$, l'encadrement $e^{-bx}\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{1}{u}\,du \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u}\,du \leqslant e^{-ax}\int_{ax}^{bx} \frac{1}{u}\,du$ fournit

$$e^{-ax}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u}\,du \leqslant e^{-ax}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

et le théorème des gendarmes fournit $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Finalement,

$$\boxed{\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ tels que } 0 < a < b,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).}$$

Exercice n° 5

La fonction $f : x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, quand x tend vers 0, $\ln(\sin x) \sim \ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Par suite, f est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1) Soient $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx$. Le changement de variables $x = \frac{\pi}{2} - t$ fournit J existe et $J = I$. Par suite,

$$\begin{aligned}2I = I + J &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x\cos x)\,dx = -\frac{\pi\ln 2}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\,dx = -\frac{\pi\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,du \\ &= -\frac{\pi\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\left(I + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\,du\right) = -\frac{\pi\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\left(I + \int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi - t))\,(-dt)\right) = -\frac{\pi\ln 2}{2} + I.\end{aligned}$$

Par suite, $I = -\dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx = -\frac{\pi\ln 2}{2}.}$$

2) Pour $n \geqslant 2$, posons $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $0 < \dfrac{k\pi}{2n} < \dfrac{\pi}{2}$ et donc $P_n > 0$. D'autre part, $\sin\left(\dfrac{(2n-k)\pi}{2n}\right) = \sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$ et $\sin\dfrac{n\pi}{2n} = 1$. On en déduit que

$$P_n^2 = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right),$$

puis

$$\begin{aligned}P_n^2 &= \prod_{k=1}^{2n-1} \frac{e^{ik\pi/(2n)} - e^{-ik\pi/(2n)}}{2i} = \frac{1}{(2i)^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(-e^{-ik\pi/(2n)}\right)\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1 - e^{2ik\pi/(2n)}\right) \\ &= \frac{1}{(2i)^{2n-1}}(-1)^{2n-1}(e^{-i\pi/2})^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1 - e^{2ik\pi/(2n)}\right) = \frac{1}{2^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1 - e^{2ik\pi/(2n)}\right)\end{aligned}$$

Maintenant, le polynôme Q unitaire de degré $2n-1$ dont les racines sont les $2n-1$ racines $2n$-èmes de l'unité distinctes de 1 est

$$\frac{X^{2n}-1}{X-1} = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{2n-1}$$

et donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)=Q(1)=2n$. Finalement,

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=P_n=\sqrt{\frac{2n}{2^{2n-1}}}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Pour $0\leqslant k\leqslant n$, posons alors $x_k=\dfrac{k\pi}{2n}$ de sorte que $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=\dfrac{\pi}{2}$ est une subdivision de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ à pas constant égal à $\dfrac{\pi}{2n}$.

Puisque la fonction $x\mapsto\ln(\sin x)$ est continue et croissante sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, on a $\dfrac{\pi}{2n}\ln(\sin(x_k))\leqslant\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}}\ln(\sin x)\,dx$ puis en sommant ces inégalités , on obtient

$$\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)\leqslant\int_{\pi/(2n)}^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$$

De même, pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}}\ln(\sin x)\,dx\leqslant\frac{\pi}{2n}\ln(\sin(x_{k+1}))$ et en sommant

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx\leqslant\frac{\pi}{2n}\ln(P_n).$$

Finalement, $\forall n\geqslant 2$, $\displaystyle\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)+\int_0^{\pi/(2n)}\ln(\sin x)\,dx\leqslant I\leqslant\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)$. Mais $\ln(P_n)=\dfrac{\ln n}{2}-(n-1)\ln 2$ et donc $\dfrac{\pi}{2n}\ln(P_n)$ tend vers $-\dfrac{\pi\ln 2}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ et comme d'autre part, $\displaystyle\int_0^{\pi/(2n)}\ln(\sin x)\,dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (puisque la fonction $x\ :\mapsto\ln(\sin x)$ est intégrable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$), on a redémontré que $I=-\dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

Exercice n° 6

La fonction $f\ :\ t\mapsto\dfrac{\ln t}{t-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$, négligeable devant $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0 et prolongeable par continuité en 1. La fonction f est donc intégrable sur $]0,1[$.

Pour $t\in]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\ln t}{t-1}=\frac{-\ln t}{1-t}=-\sum_{k=0}^{n}t^k\ln t+\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}$$

Pour $t\in]0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, posons $f_n(t)=-t^n\ln t$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Chaque fonction f_k, $0\leqslant k\leqslant n$, est continue sur $]0,1]$ et négligeable en 0 devant $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Donc chaque fonction f_k est intégrable sur $]0,1]$ et donc sur $]0,1[$. Mais alors, il en est de même de la fonction $t\mapsto\dfrac{t^{n+1}\ln t}{1-t}=\dfrac{\ln t}{t-1}+\displaystyle\sum_{k=0}^{n}t^k\ln t$ et

$$\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,dt=-\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^k\ln t\,dt+\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt$$

• La fonction $g\ :\ t\mapsto\dfrac{t\ln t}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1. Cette fonction est en particulier bornée sur $]0,1[$. Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt\right|\leqslant\int_0^1 t^n|g(t)|\,dt\leqslant M\int_0^1 t^n\,dt=\frac{M}{n+1}.$$

Par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt=0$. On en déduit que la série de terme général $-\displaystyle\int_0^1 t^k\ln t\,dt$ converge et que

$$\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,dt=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1(-t^k\ln t)\,dt.$$

• Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, une intégration par parties fournit

$$\int_{\varepsilon}^{1} (-t^k \ln t)\, dt = \left[-\frac{t^{k+1}\ln t}{k+1}\right]_{\varepsilon}^{1} + \frac{1}{k+1}\int_{\varepsilon}^{1} t^k\, dt = \frac{\varepsilon^{k+1}\ln \varepsilon}{k+1} + \frac{1-\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\displaystyle\int_0^1 (-t^k \ln t)\, dt = \frac{1}{(k+1)^2}$. Finalement,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Exercice n° 7

La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 0 et 1 et donc est intégrable sur $]0,1[$.

Soit $x \in]0,1[$. Chacune des deux fonctions $t \mapsto \dfrac{t}{\ln t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ se prolonge par continuité en 0 et est ainsi intégrable sur $]0,x]$. On peut donc écrire

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t}\, dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\, dt.$$

Dans la première intégrale, on pose $u = t^2$ et on obtient $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\, dt = \int_0^x \frac{2t}{\ln(t^2)}\, dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln u}\, du$ et donc

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\, dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt.$$

On note alors que, puisque $x \in]0,1[$, $x^2 < x$. Pour $t \in [x^2, x]$, on a $t\ln t < 0$ et donc $\dfrac{x}{t\ln t} \leqslant \dfrac{t}{t\ln t} = \dfrac{1}{\ln t} \leqslant \dfrac{x^2}{t\ln t}$ puis par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_{x^2}^x \frac{x}{t\ln t}\, dt \leqslant \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}\, dt \leqslant \int_{x^2}^x \frac{x^2}{t\ln t}\, dt$ et donc

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\, dt \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt \leqslant x \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\, dt$$

Maintenant, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\, dt = \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln x| = \ln 2$ et on a montré que, pour tout réel x de $]0,1[$,

$$x^2 \ln 2 \leqslant \int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\, dt \leqslant x\ln 2$$

Quand x tend vers 1, on obtient

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \ln 2.}$$

Exercice n° 8

1) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$. De plus, quand t tend $+\infty$,

$$e^{-t^2} \sim \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) e^{-t^2} = \left(-\frac{1}{2t} e^{-t^2}\right)'.$$

D'après un théorème de sommation des relations de comparaison, quand x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \sim \int_x^{+\infty} \left(-\frac{1}{2t} e^{-t^2}\right)'\, dt = \frac{1}{2x} e^{-x^2},$$

et donc

$$\boxed{e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.}$$

2) Pour $a>0$ fixé, $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$ converge (se montre en intégrant par parties (voir exercice n° 3)) puis

$$\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx = -\int_1^a \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to 0}{=} -\int_1^a \frac{\cos x}{x}\,dx + O(1)$$
$$\underset{a\to 0}{=} -\int_1^a \frac{1}{x}\,dx + \int_1^a \frac{1-\cos x}{x}\,dx + O(1) \underset{a\to 0}{=} -\ln a + \int_1^a \frac{1-\cos x}{x}\,dx + O(1).$$

Maintenant, $\dfrac{1-\cos x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$ et en particulier, $\dfrac{1-\cos x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par suite, la fonction $x\mapsto \dfrac{1-\cos x}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0. Cette fonction est donc intégrable sur $]0,1]$ et en particulier, $\displaystyle\int_1^a \frac{1-\cos x}{x}\,dx$ a une limite réelle quand a tend vers 0. On en déduit que $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to 0}{=} -\ln a + O(1)$ et finalement

$$\boxed{\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to 0}{\sim} -\ln a.}$$

3) Soit $a>0$.

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\,dx - \frac{1}{a^2}\right| = \left|\int_0^1\left(\frac{1}{x^3+a^2}-\frac{1}{a^2}\right)\,dx\right| = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^3+a^2)a^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1^3}{(0^3+a^2)a^2}\,dx = \frac{1}{a^4}$$

Donc, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{=} \frac{1}{a^2} + o\left(\frac{1}{a^2}\right)$ ou encore

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}.}$$

Exercice n° 9

• **Domaine de définition.** Soit $x\in\mathbb{R}$.
Si $x<0$, la fonction $t\mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ n'est pas définie sur $[x,0[\subset[x,x^2]$ et $f(x)$ n'est pas défini.
Si $0<x<1$, $[x^2,x]\subset]0,1[$. Donc la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2,x]$. Dans ce cas, $f(x)$ existe et est de plus strictement positif car $\ln t<0$ pour tout t de $]0,1[$.
Si $x>1$, $[x,x^2]\subset]1,+\infty[$. Donc la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x,x^2]$. Dans ce cas aussi, $f(x)$ existe et est strictement positif.
Enfin, $f(0)$ et $f(1)$ n'ont pas de sens.

$$\boxed{f \text{ est définie sur } D=]0,1[\cup]1,+\infty[\text{ et strictement positive sur } D.}$$

• **Dérivabilité.** Soit I l'un des deux intervalles $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur I. Soit F une primitive de cette fonction sur I.
Si $x\in]0,1[$, on a $[x^2,x]\subset]0,1[$ et donc $f(x)=F(x^2)-F(x)$. De même, si $x\in]1,+\infty[$, $[x,x^2]\subset]1,+\infty[$ et donc $f(x)=F(x^2)-F(x)$.
On en déduit que f est de classe C^1 sur D. De plus, pour $x\in D$,

$$f'(x) = 2xF'(x^2)-F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

• **Variations.** f' est strictement positive sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (mais pas nécessairement sur D).

• **Etude en 0.** Soit $x \in]0,1[$. On a $0 < x^2 < x < 1$ et de plus la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est décroissante sur $[x^2, x] \subset]0,1[$ en tant qu'inverse d'une fonction strictement négative et strictement croissante sur $]0,1[$. Donc, $\dfrac{x - x^2}{\ln x} \leqslant \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,dt \leqslant \frac{x - x^2}{\ln(x^2)}$ puis

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{x^2 - x}{2\ln x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2 - x}{\ln x}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (on note encore f le prolongement).

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ tend vers 0. Ainsi,

- f est continue sur $[0,1[$,
- f est de classe C^1 sur $]0,1[$,
- f' a une limite réelle quand x tend vers 0 à savoir 0.

D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0,1[$ et $f'(0) = 0$.

• **Etude en 1.** On a vu au n° 7 que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \ln 2$ (la limite à droite en 1 se traite de manière analogue). On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ (on note encore f le prolongement obtenu).
Ensuite quand x tend vers 1, $f'(x)$ tend vers 1. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(1) = 1$.
En particulier, f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et d'après plus haut f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• **Etude en $+\infty$.** Pour $x > 1$, $f(x) \geqslant \dfrac{x^2 - x}{\ln x}$. Donc $f(x)$ et $\dfrac{f(x)}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

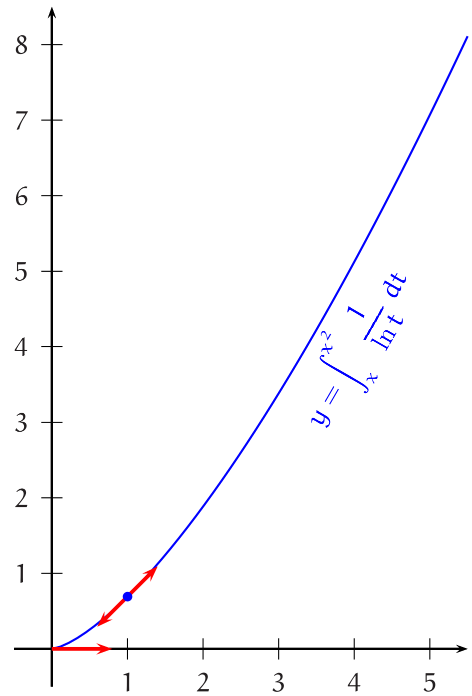
• **Convexité.** Pour $x \in D$, $f''(x) = \dfrac{\ln x - \dfrac{x-1}{x}}{\ln^2 x}$.
En 1, en posant $x = 1 + h$ où h tend vers 0, on obtient

$$f''(1+h) = \frac{(1+h)\ln(1+h) - h}{(1+h)\ln^2(1+h)} = \frac{(1+h)\left(h - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)\right) - h}{h^2 + o(h^2)} = \frac{1}{2} + o(1).$$

f est donc de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $f''(1) = \dfrac{1}{2}$.

Pour $x \neq 1$, $f''(x)$ est du signe de $g(x) = \ln x - 1 + \dfrac{1}{x}$ dont la dérivée est $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$. La fonction g est stictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Donc pour $x \neq 1$, $g(x) > g(1) = 0$. On en déduit que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) > 0$ et donc que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^+$.

• **Graphe.**



Exercice nº 10

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{(-1)^{E(x)}}{x}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ et donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$.
Soient X un réel élément de $[2, +\infty[$ et $n = E(X)$.

$$\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx.$$

Or, $\left|\displaystyle\int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx\right| \leqslant \dfrac{X-n}{n} \leqslant \dfrac{1}{E(X)}$. Cette dernière expression tend vers 0 quand le réel X tend vers $+\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx = 0$.

D'autre part, la suite $\left((-1)^k \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)\right)_{k \geqslant 1}$ est de signe alternée et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $(-1)^k \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$, $k \geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées ou encore, quand le réel X tend vers $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ a une limite réelle.

Il en est de même de $\displaystyle\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx$ converge. De plus

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Calcul. Puisque la série converge, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{(1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1))^2 \times (2n+1)}{(2 \times 4 \times \ldots \times (2n))^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{4n}} \times \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2 \times (2n+1)\right).$$

D'après la formule de Stirling,

$$\frac{1}{2^{4n}} \times \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2 \times (2n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{4n}} \times \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} (\sqrt{4\pi n})^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{4n} (\sqrt{2\pi n})^4} \times (2n) = \frac{2}{\pi}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ et on a montré que

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).}$$

Exercice n° 11

1) Puisque f est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, pour $x \geqslant 2$ on a

$$0 \leqslant xf(x) = 2\left(x - \frac{x}{2}\right) f(x) \leqslant 2\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt = 2\left(\int_{x/2}^{+\infty} f(t)\,dt - \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt\right)$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ car f est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc si f est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1,+\infty[$ alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice n° 12

L'inégalité $|ff''| \leqslant \frac{1}{2}\left(f^2 + f''^2\right)$ montre que la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$ puis, pour X et Y tels que $X \leqslant Y$, une intégration par parties fournit

$$\int_X^Y f'^2(x)\,dx = [f(x)f'(x)]_X^Y - \int_X^Y f(x)f''(x)\,dx.$$

Puisque la fonction f'^2 est positive, l'intégrabilité de f'^2 sur $\mathbb{R}$ équivaut à l'existence d'une limite réelle quand X tend vers $-\infty$ et Y tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_X^Y f'^2(x)\,dx$ et puisque la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$, l'existence de cette limite équivaut, d'après l'égalité précédente, à l'existence d'une limite réelle en $+\infty$ et $-\infty$ pour la fonction ff'.

Si f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2(x)dx = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$. En particulier, pour x suffisament grand, $f(x)f'(x) \geqslant 1$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geqslant x$ contredisant l'intégrabilité de la fonction f^2 sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.
De même la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^-$ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $-\infty$.
Si cette limite est un réel non nul ℓ, supposons par exemple $\ell > 0$. Pour x suffisament grand, on a $f(x)f'(x) \geqslant \ell$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geqslant \ell x$ contredisant de nouveau l'intégrabilité de la fonction f^2. Donc la fonction ff' tend vers 0 en $+\infty$ et de même en $-\infty$.

Finalement, la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx\right)^2 = \left(-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx\right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x)\,dx\right)^2.$$

Puisque les fonctions f et f'' sont continues sur $\mathbb{R}$, on a l'égalité si et seulement si la famille (f, f'') est liée.
Donc nécessairement, ou bien f est du type $x \mapsto A\,\mathrm{ch}(\omega x) + B\,\mathrm{sh}(\omega x)$, ω réel non nul, qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A = B = 0$, ou bien f est affine et nulle encore une fois, ou bien f est du type $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ et nulle encore une fois.
Donc, on a l'égalité si et seulement si f est nulle.